اذا كان $(N, |)$ مرتبة جزئياً

$$x \le y \Leftrightarrow x | y$$

مثال 1 -

$$E = \{1, 2, 3\}$$

مجموعة منتهية

$$P(E) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$$

لنعرف على هذه المجموعة علاقة $\le$ اي

$$A \le B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

انعكاسية - تخالفية - متعدية . وبالتالي هي علاقة ترتيب

$(P(E), \subseteq)$ م.م.2

$\{1\}$, $\{2\}$ عنصرين غير متقاربين

ارسم مخطط هاز لهذه المجموعة المرتبة جزئياً .

مثال 2 -

لتكن لدينا

$$X = \{a_1, a_2\}$$

$$P = \{\phi, \{a_1\}\}$$

$$Q = \{\phi, \{a_2\}\}$$

ولنعرف على $P \times Q$

$$(a_1, b_1) \le (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \subseteq a_2 \; , \; b_1 \subseteq b_2$$

والمطلوب

اوجد $P \times Q$ وهل $(P \times Q, \subseteq)$ م.م. جزئياً ثم ارسم مخطط هاسه لها.

$$P \times Q = \{(\phi, \phi), (\phi, \{a_2\}), (\{a_1\}, \phi), (\{a_1\}, \{a_2\})\}$$

علاقة ترتيب جزئياً .

$(\{a_1\}, \{a_1\})$

$(\{a_1\}, \phi)$

$(\phi, \{a_1\})$

(ϕ, ϕ)

- العناصر الأصغرية والعناصر الأعظمية .

تعريف ـ ١ ـ

لتكن $(E, \leq)$ م.م.ج عندئذ فإن :

(1) - إذا كان يوجد في E عنصر مثل g بحيث أن :

$$x \leq g \quad ; \quad \forall x \in E$$

فإن g يسمى عنصراً أكبر في المجموعة E وبالمقابل .

(2) - إذا كان يوجد في E عنصر مثل l بحيث يحقق :

$$l \leq x \; ; \; \forall x \in E$$

نسمي l عنصر الأصغر للمجموعة E في المثال السابق $(P(E), \leq)$

الأصغر ϕ ، الأكبر E .

في المثال السابق العنصر الأصغر (ϕ, ϕ) والعنصر الأكبر $(\{a_1\}, \{a_1\})$

تعريف ـ 2 ـ

إذا كانت $(E, \leq)$ م.م.ج عندها فإن :

(1) - إذا كان يوجد في E عنصر مثل m بحيث أنه لا يوجد في E عنصر x يحقق العلاقة :

$$x \neq m \quad \text{وأيضاً} \quad m \leq x$$

في هذه الحالة نسمي m عنصراً أعظمياً في E .

(2) - إذا كان يوجد في E عنصراً مثل n بحيث أنه لا يوجد في E عنصراً x يحقق الشرط .

$$x \neq n \quad , \quad x \leq n$$

نسمي a عنصراً أصغرياً من المجموعة E .

ملاحظة :

اذا كانت E مجموعة منتهية ومرتبة جزئياً فانها تحتوي حتماً على عنصر أعظمي واحد على الأقل وكذلك على عنصر أصغري واحد على الأقل.

ملاحظات :

١- اذا كانت E مجموعة غير منتهية فقد تحتوي على عناصر أصغرية أو أعظمية أو لا تحتوي على اي منها .

٢- اذا كانت P عنصراً غير متقارناً مع اي عنصر من المجموعة E فان P هو عنصر أصغري وأعظمي في نفس الوقت .

٣- العنصر الأكبر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أعظمي فيها والعنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أصغري ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة .

مثال :

لنأخذ المجموعة التالية :

$$E = \{2, 3, 4, 9\}$$

٣ .2 بعلاقة القسمة .

ما هي العناصر الأعظمية والأصغرية ؟

العناصر الأعظمية 4, 9

العناصر الأصغرية 2, 3

ولا يوجد عنصر أكبر وأصغر.

مثال :

أوجد العناصر الأعظمية والأصغرية في هذه المجموعة المرتبة جزئياً وفق مخطط هاس.

a_1, a_2, a_3

b_1, b_2, b_3

العناصر الأصغرية $b_1, b_2, b_3, \ldots$

العناصر الأعظمية $a_1, a_2, a_3, \ldots$

- المجموعات الجزئية المحدودة .

تعريف ٣ -

لتكن $(E, \leq)$ م.ج.ر ولتكن $A \subseteq E$ غير خالية عندئذ

(1) - إذا كان يوجد في E عنصر مثل s بحيث يكون

$x \leq s \; ; \; \forall x \in A$

في هذه الحالة نسمي s حداً أعلى للمجموعة A في E

(2) - وإذا كان يوجد في E عنصر مثل t بحيث يكون

$t \leq x \; ; \; \forall x \in A$

في هذه نسمي t حداً أدنى للمجموعة A في E .

مثال :

$A = \{2, 3, 4, 9\}$ م.ج.

جزئية من مجموعة $E = (N, \leq)$ م.ج بعلاقة القسمة .

الحدود الأعلى

$36t \; ; \; t \in Z^+$

الحد الأدنى 1 .

36 اصغر الحدود العليا و 1 أكبر الحدود الدنيا .

تعريف ٤ -

لتكن A مجموعة جزئية من E حيث $(E, \leq)$ نقول عن العنصر $s \in E$

أنه حد اعلى اصغري لـ A اذا حقق الشرطان التاليان :

(1) s حد أعلى لـ A في E .

(2) - s اصغر الحدود العليا أي انه إذا وجد s' حد اعلى آخر لـ A في E فإن

$s \leq s'$ في هذه الحالة نكتب رمزاً :

$$\sup A = s$$

كما نقول ان العنصر $t \in E$ حد أدنى أعظمي لـ A في E اذا حقق الشرطان

التاليان :

(1)- t حد أدنى.

(2)- t أكبر الحدود الدنيا أي أنه إذا وجد t' حد أدنى آخر لـ A في E فإن $t' \leq t$ ونكتب $\inf A = t$

ملاحظة:

ليس من الضروري أن يكون للمجموعة الجزئية sup , inf وإذا وجد أي منهما فإنه قد ينتمي إلى المجموعة A أو لا ينتمي.

~~يكون مجموعة~~

تعريف:

تسمى المجموعة المرتبة كلياً مجموعة مرتبة جيداً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية منها تحتوي على عنصر أصغر.

مثال:

مجموعة الأعداد الطبيعية $(N, \leq)$ تحت علاقة الترتيب الطبيعي هي مجموعة مرتبة جيداً في حين مجموعة الأعداد الصحيحة تحت علاقة الترتيب نفسها مجموعة غير مرتبة جيداً.

مثال:

$(R, \leq)$, $\leq$ ترتيب طبيعي ولتكن

$$A = \{ \tfrac{1}{n} \in R \; ; \; n \in Z^+ \}$$

أوجد sup , inf

$\sup A = 1$

$\inf A = 0$

انتهت المحاضرة